**上饶市2024届高三六校第一次联合考试**

**上饶一中 上饶二中 广信中学 天佑中学 余干中学 玉山一中**

**数学试卷**

**命审单位：余干中学 上进教育研究院**

**试卷共4页，19小题，满分150分.考试用时120分钟.**

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡指定位置上.**

**2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用楾皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.**

**3.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，请将答题卡交回.**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】解出集合，利用交集计算即可.

【详解】由可知：，即，故，

所以.

故选：D.

2. 已知复数，其中为虚数单位，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的除法运算化简，找到共轭复数即可.

【详解】结合题意：，所以.

故选：B.

3. 已知向量，，且，则（ ）

A. 2 B. 3 C. 4 D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由求出，从而可求解.

【详解】由，，所以，

因为，所以，得，

所以，故A正确.

故选：A.

4. 曲线在点处的切线与直线平行，则（ ）

A.  B.  C. 1 D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】确定曲线在点处的切线的斜率，求出函数的导数，根据导数的几何意义，即可求得答案.

【详解】因为曲线在点处的切线与直线平行，

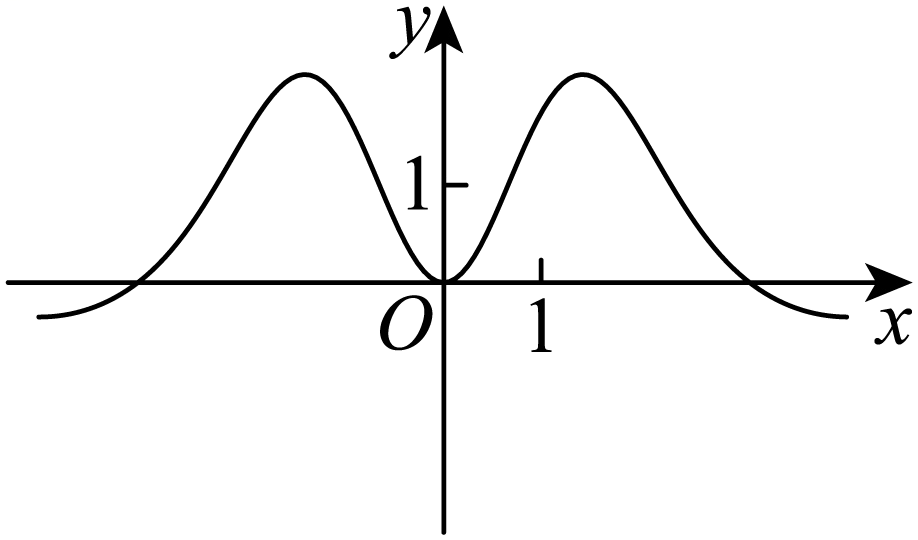
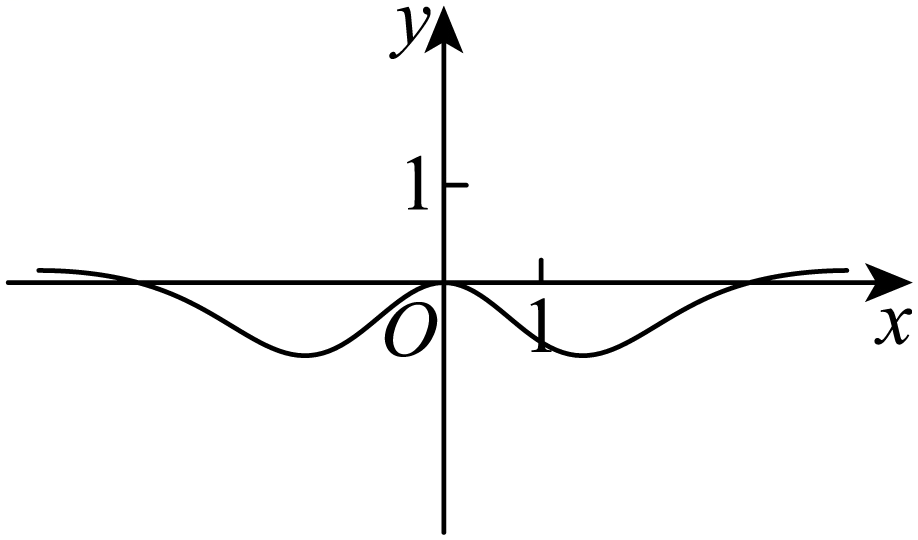
故曲线在点处的切线的斜率为2，

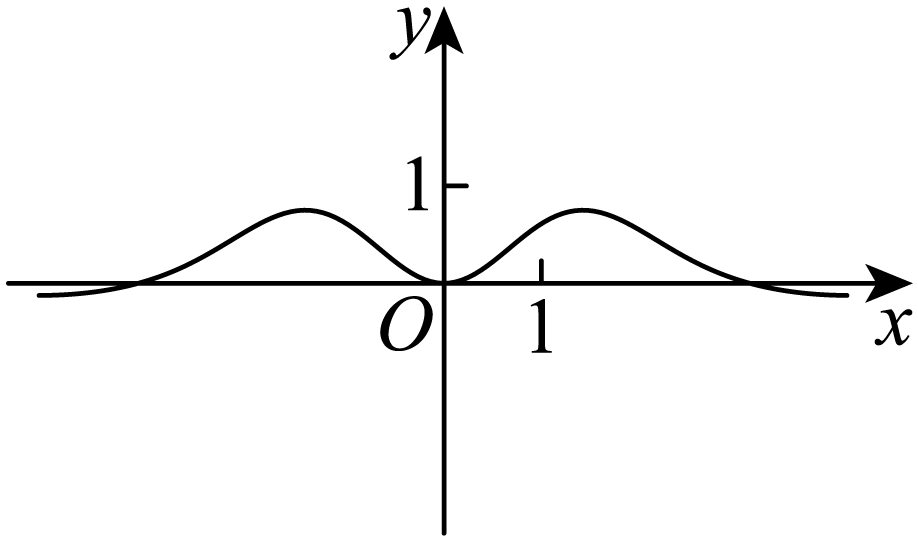
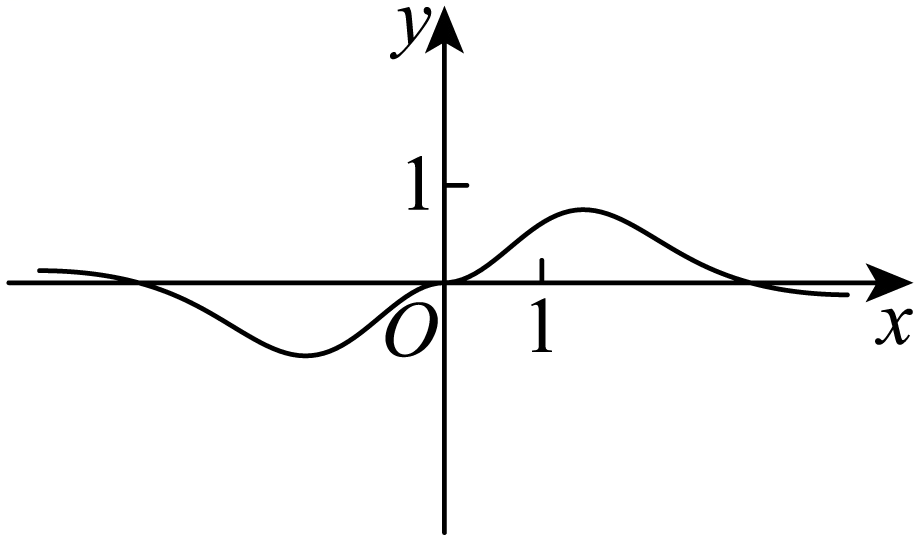
因为，所以，

所以，

故选：C.

5. 函数的图象大致为（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】确定函数的奇偶性排除D选项，再由函数值的取值范围排除A、B选项后可得正确结论．

【详解】由已知，为偶函数，排除D；

当时，，，

令，，时，，

当时，，当时，，

所以，当时，，即，

所以，当时，，即，可排除A、B.

故选:C.

6. 若，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】合理换元，求出关键数值，结合诱导公式处理即可.

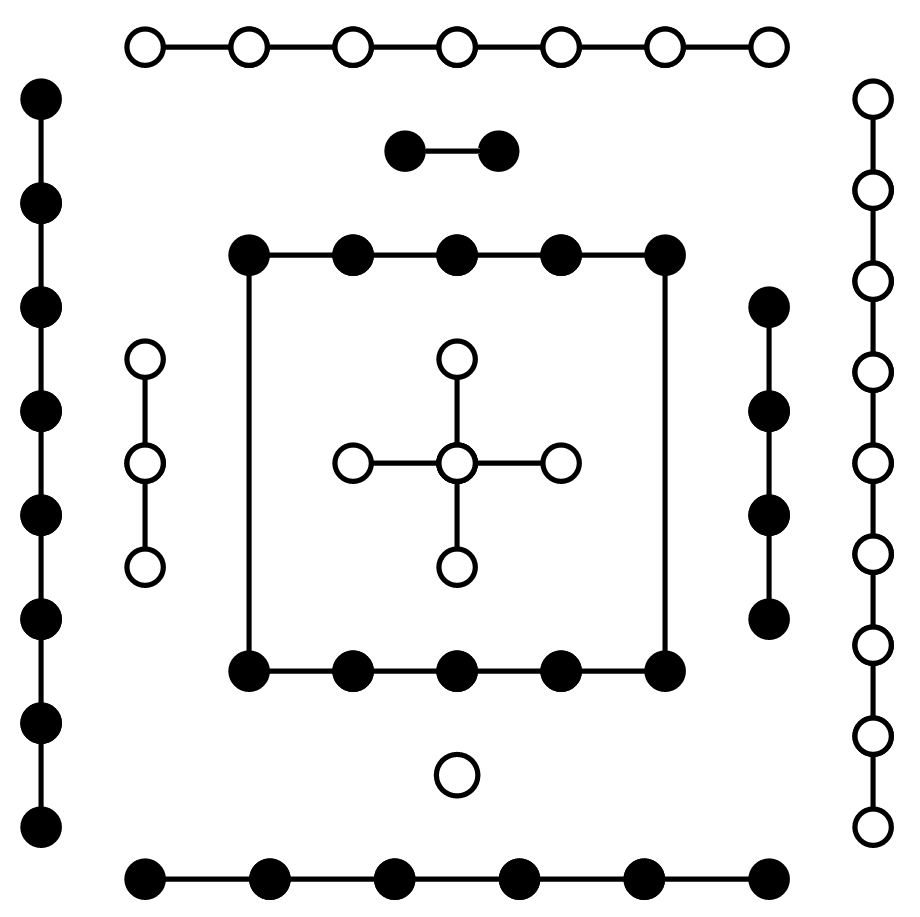
【详解】令，，得，则，

即，整理得，且，

那么，则.

故选：C.

7. 《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中华文化，阴阳术数之源，其中河图排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中.如图，白点为阳数，黑点为阴数.若从这10个数中任取3个数，已知3个数中至多有1个阴数，则取出的3个数之和是5的倍数的概率是（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】先求出10个数中任取3个数，至多有1个阴数的总基本事件个数，再列举出取出的3个数之和是5的倍数的基本事件，利用古典概型概率公式即可求解.

【详解】如图，白点为阳数，黑点为阴数，阳数为，阴数为

若从这10个数中任取3个数且3个数中至多有1个阴数，

基本事件总数为，

取出的3个数之和是5的倍数，基本事件包括，

共有12个，

取出的3个数之和是5的倍数的概率是.

故选：A.

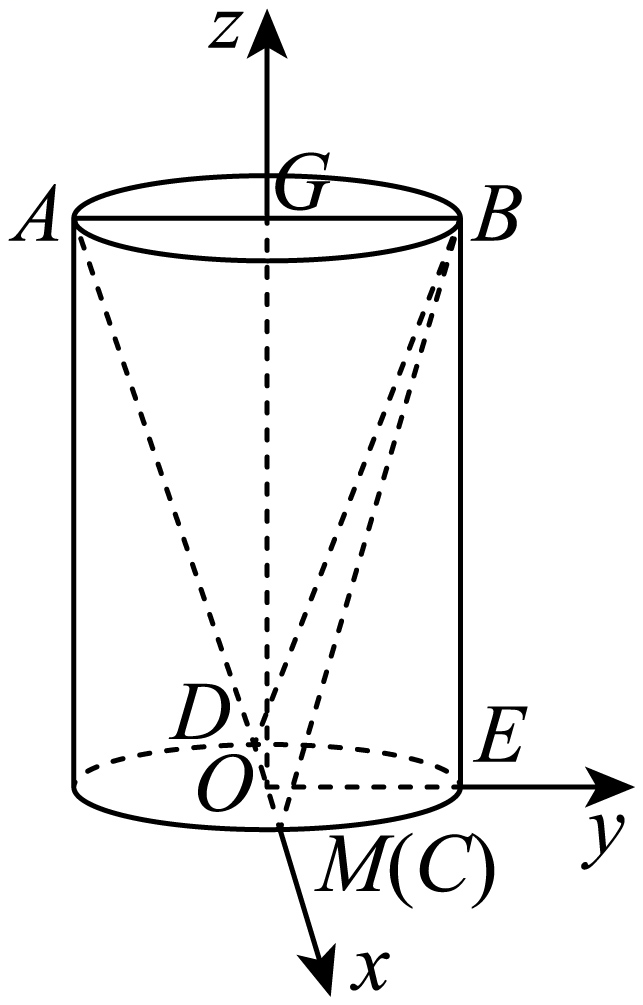
8. 已知圆柱的底面半径为1，高为2，，分别为上、下底面圆的直径，四面体的体积为，则直线与所成角的余弦值为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，假定的坐标，结合已知解出的坐标，利用线线角的向量求法求解即可.

【详解】

如图，找底面圆心，作与底面垂直，//，，

故以为原点，建立空间直角坐标系，规定，，设，，

易知底面圆方程为，则，，

故，，

故，

设到面的距离为，设面的法向量，故有，，解得，，，

故，由点到平面的距离公式得，已知四面体的体积为，

故得，解得(负根舍去)，易得，故，，

，，设直线与所成角为，故有.

故选：D

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9. 已知，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AB

【解析】

【分析】对A：由不等式性质计算即可得；对B：结合指数函数的单调性即可得；对C、D：举出反例即可得.

【详解】对A：由，故，则，即，故A正确；

对B：由，且为定义域上的单调递增函数，故，故B正确；

对C：当，时，有，，此时，故C错误；

对D：当，时，有，，此时，故D错误.

故选：AB.

10. 已知定义在上的奇函数满足，且在上单调递增，则

A. 的图象关于中心对称 B. 是周期函数

C. 在上单调递减 D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】对A：由可得的图象关于直线对称；对B：结合为奇函数与即可得周期性；对C：结合对称性与在上单调递增即可得；对D：结合周期性与奇函数的性质计算即可得.

【详解】对A：由，故的图象关于直线对称，故A错误；

对B：由为奇函数，故，又，

故，即有，

则，

即，故是周期函数且周期为，故B正确；

对C：由在上单调递增，且为奇函数，故在上单调递增，

又的图象关于直线对称，故在上单调递减，故C正确；

对D：由为定义在上奇函数，故，有，

由的图象关于直线对称，故的图象关于中心对称，

故，由，故，

即有，，故，



，故D错误.

故选：BC.

11. 已知正项数列满足，，其中，则（ ）

A. 为单调递减数列 B. 

C.  D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用导数判断单调性，放缩法证明不等式逐个选项分析即可.

【详解】对于AB，由已知得，令，

定义域为，，令，，

当时，此时恒成立，故在上单调递减，

，也可得，即，

故在上单调递减，当时，，则，

故，则，即，故为单调递减数列，

故A正确，显然，故B错误；

对于C，欲证，且由题意得，

即证，即证，取指数得，

又易知，化简得，故证明恒成立即可，

令，，而，

故在上单调递增，且，故，

即恒成立，故得证，故C正确，

对于D，由C可知，，，，，，

上式相加，得，

故得证，故D正确

故选：ACD

【点睛】关键点点睛：本题解决的关键是利用导数证明数列的单调性，再构造函数结合放缩法证明不等式即可.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 请写出一个焦点在轴上，焦距为4的椭圆的标准方程\_\_\_\_\_\_.

【答案】（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据给定条件，结合椭圆的标准方程写出得解.

【详解】依题意，设椭圆方程为，其半焦距，显然，

令，得，所以椭圆的标准方程为.

故答案为：（答案不唯一）.

13. 动点与两个定点，满足，则点到直线：的距离的最大值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】利用两点距离公式及已知求得的轨迹是圆心为，半径为2的圆上，再确定直线所过的定点并判断其与圆的位置关系，要使圆上点到直线距离最大，有圆心与定点所在直线与直线垂直，进而求最大值.

【详解】令，则，整理得，

所以的轨迹是圆心为，半径为2的圆上，

又直线：可化为，易知过定点，

由，故点在圆外，

则圆心与定点所在直线与直线垂直，圆心与直线距离最大，

所以点到直线距离的最大值为.

故答案为：

14. 函数（）在区间上有且只有两个零点，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【详解】利用三角函数的性质分析求解即可.

由于在区间上有且只有两个零点，所以，

即，由得，，，

∵，∴，

∴或，解得或，

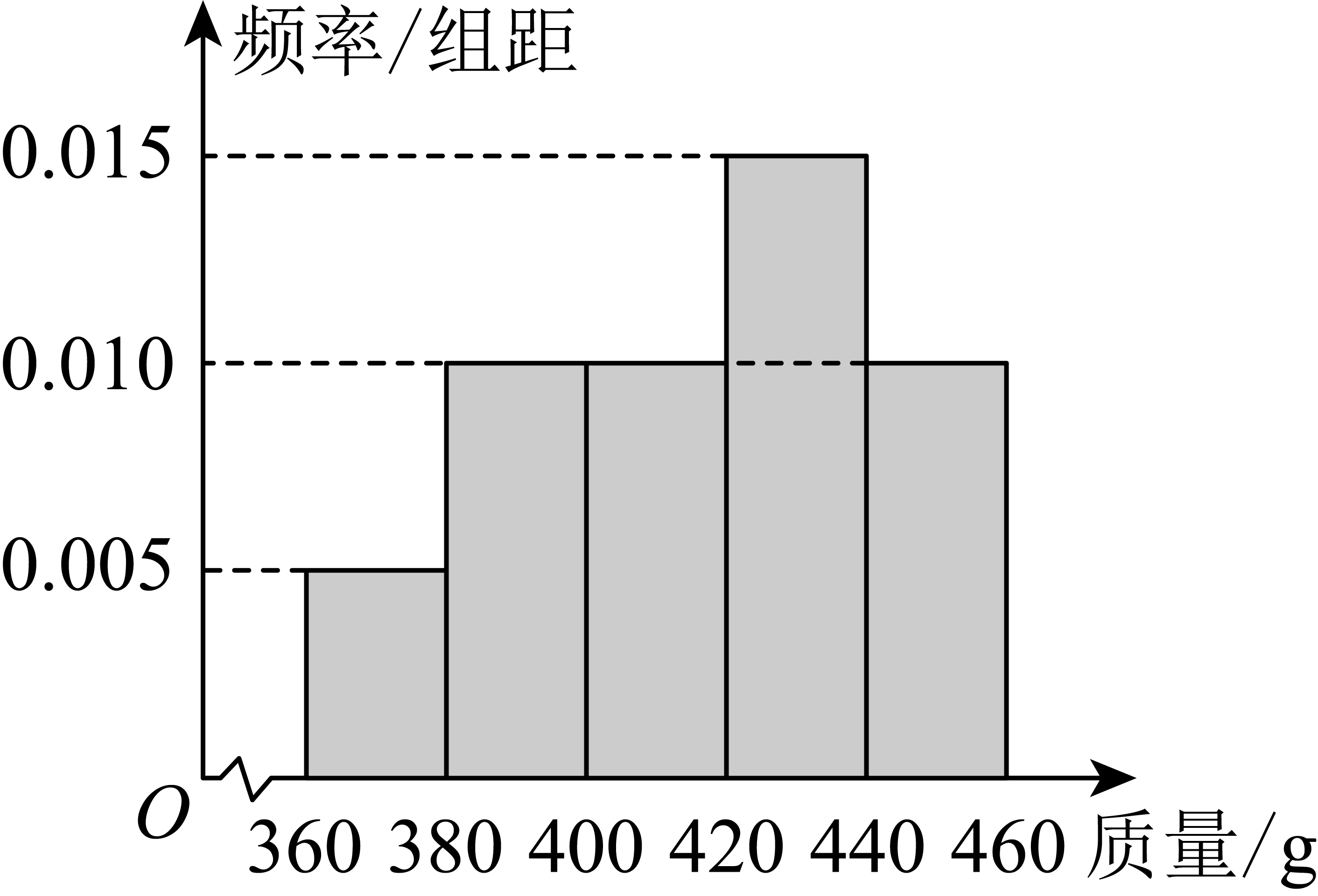
所以的取值范围是.

故答案为：

【点睛】关键点睛：本题的关键是利用整体法得到，再根据零点个数得到不等式组，解出即可.

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 已知某种业公司培育了新品种的软籽石榴，从收获的果实中随机抽取了50个软籽石榴，按质量（单位：g）将它们分成5组：，，，，，得到如下频率分布直方图.



（1）用样本估计总体，求该品种石榴的平均质量；（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）

（2）按分层随机抽样，在样本中，从质量在区间，，内的石榴中抽取7个石榴进行检测，再从中抽取3个石榴作进一步检测.记这3个石榴中质量在区间内的个数为，求的分布列与数学期望.

【答案】（1）416g

（2）分布列见解析，

【解析】

【分析】（1）由频率分布直方图中，样本平均数的计算公式求解；

（2）由分层抽样，计算这三个组中抽取的个数，根据可能的取值，计算对应的概率，列出分布列，由公式求数学期望.

小问1详解】

该品种石榴的平均质量为，

所以该品种石榴的平均质量为416g.

【小问2详解】

质量在区间，，内的频率比为，

所以分层抽样抽取时，质量在区间，，内的石榴个数分别为2，2，3.

由题意*X*的所有可能取值为0，1，2，3，

，，

，，

所以X的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

.

16. 设为数列的前项和，已知是首项为、公差为的等差数列.

（1）求的通项公式；

（2）令，为数列的前项积，证明：.

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由等差数列定义可得，由与的关系即可得；

（2）由与可得，即可得，由，可得，借助等比数列求和公式计算即可得证.

【小问1详解】

由是首项为、公差为的等差数列，

故，

即，

当时，，

故

，

当时，，符合上式，

故；

【小问2详解】

由，，

故，

则

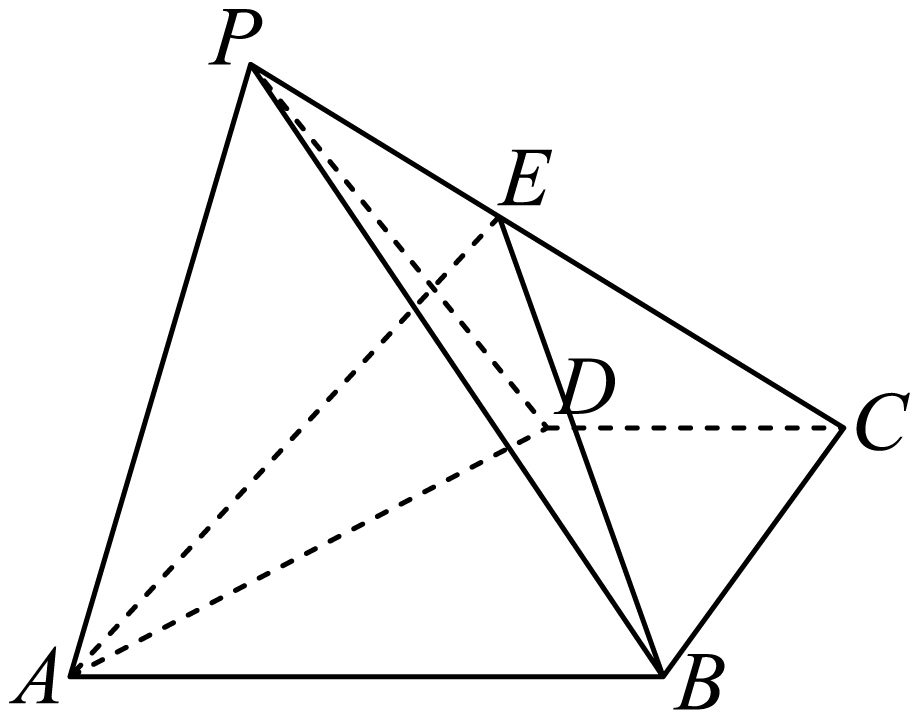
，

由，

故，

则.

17. 如图，在四棱锥中，平面平面，，，，，.



（1）证明：；

（2）点在线段上，当直线与平面所成角的正弦值为时，求平面与平面的夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）

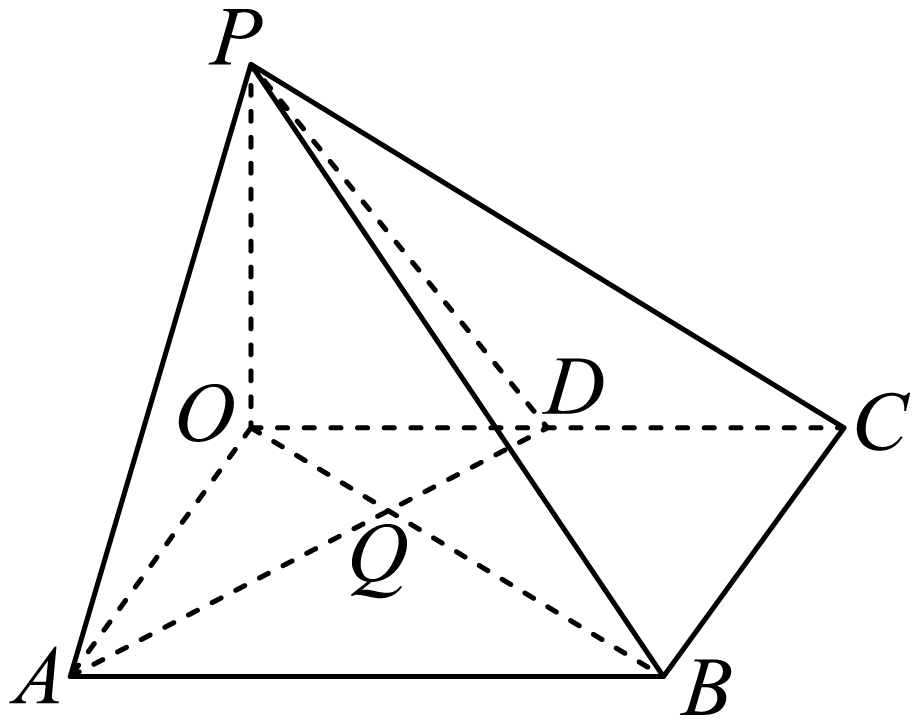
【解析】

【分析】（1）要证，需要证过的平面与垂直即可，根据面面垂直的性质定理及线面垂直的判定定理结合条件即得；

（2）建立空间直角坐标系，先根据条件确定点的坐标，再求二面角.

【小问1详解】

如图：



由于平面平面，平面平面，

过点作的垂线交的延长线于点，则平面.

连接交于，连接，

∵，，

∴，∴，

又，，

∴四边形为矩形，

∴，∴，

∴，∴，

又∵，

∴，即，

又平面，平面，

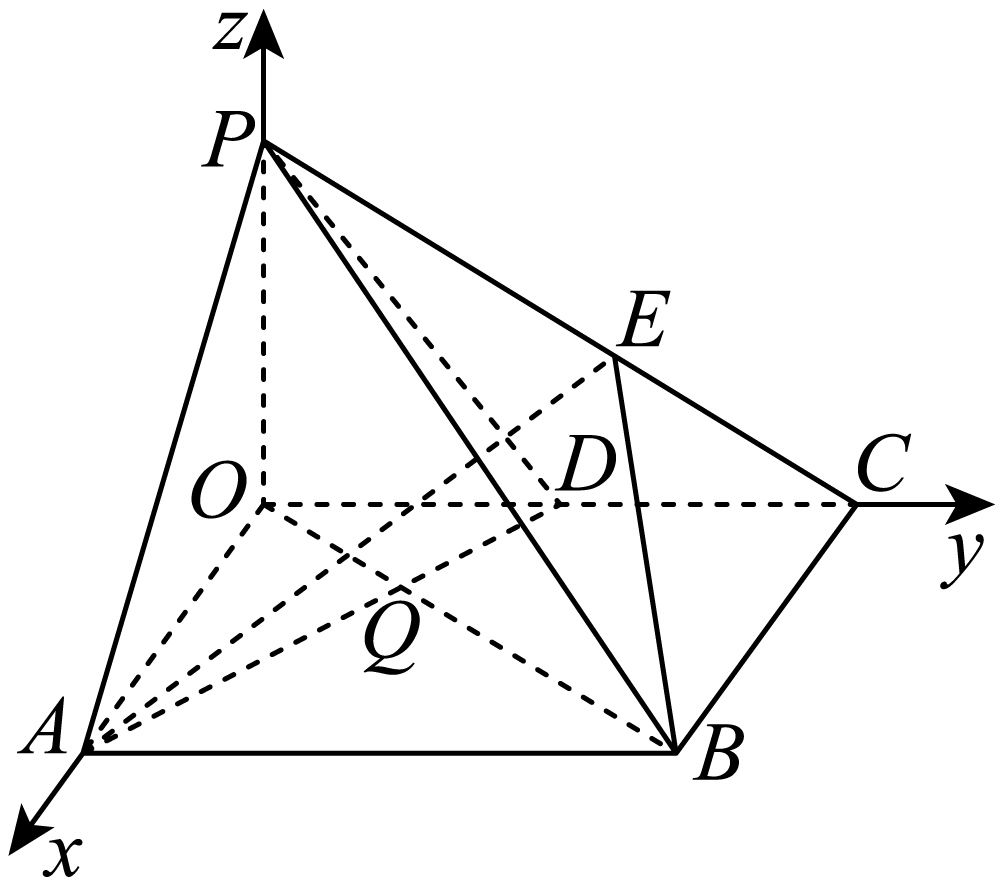
∴，又平面，

∴平面，又∵平面，

∴.

【小问2详解】

以为坐标原点，，，所在直线分別为，，轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则，，，，

由于在上，设，

则，∴，

又平面的法向量，设直线与平面所成角为，

∴，

解得或（舍去），

∴，∴，，，

设平面的法向共，平而的法向共，

则即，

取，得，，

∴，

故平面与平面夹角的余弦值为.

18. 已知双曲线：（，）的左焦点到其渐近线的距离为，点在上.

（1）求的标准方程；

（2）若直线与交于，（不与点重合）两点，记直线，，的斜率分别为，，，且，是否存在值，使得.若存在，求出的值和直线的方程；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）

（2）；直线为

【解析】

【分析】（1）借助渐近线公式及点到直线的距离公式，并代入点计算即可得；

（2）借助韦达定理结合从而得到直线中所设参数的关系，取线段中点，由可得，即可得的值和直线的方程.

【小问1详解】

由双曲线：可得，渐近线方程为：，

则有，化简得，又在上，

即，即，故：；

【小问2详解】

由题意可知直线的斜率存在且斜率为，

设直线为，、，

联立直线与双曲线，消去可得，

则有且，

即且，

有，，

由，故、，

则





，

即有，即，

故或，

当时，直线为，过点，故舍去，

当时，直线为，

由、，则线段中点为，

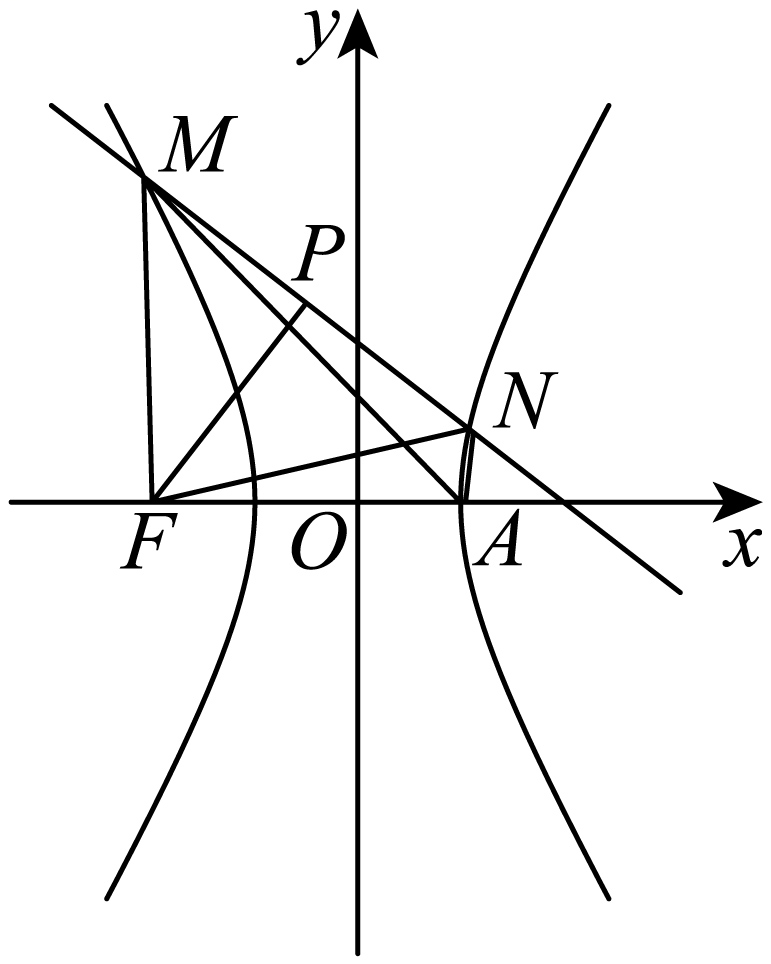
，，

即，由，，，

故有，即，解得，

故，则直线为，

即存在，使得，此时直线的方程为.

.

【点睛】关键点睛：本题关键在于借助韦达定理结合题目所给，计算出直线中参数得关系.

19. 若函数在上有定义，且对于任意不同，都有，则称为上的“类函数”.

（1）若，判断是否为上的“3类函数”；

（2）若为上的“2类函数”，求实数的取值范围；

（3）若为上的“2类函数”，且，证明：，，.

【答案】（1）是上的“3类函数”，理由见详解.

（2）

（3）证明过程见详解.

【解析】

【分析】（1）由新定义可知，利用作差及不等式的性质证明即可；

（2）由已知条件转化为对于任意，都有，，只需且，利用导函数研究函数的单调性和最值即可.

（3）分和两种情况进行证明，，用放缩法进行证明即可.

【小问1详解】

对于任意不同的，

有，，所以，

，

所以是上的“3类函数”.

【小问2详解】

因为，

由题意知，对于任意不同的，都有，

不妨设，则，

故且，

故为上的增函数，为上的减函数，

故任意，都有，

由可转化为，令，只需

，令，在单调递减，

所以，，故在单调递减，

，

由可转化为，令，只需

，令，在单调递减，

且，，所以使，即，

即，

当时，，，故在单调递增，

当时，，，故在单调递减，

，

故.

【小问3详解】

因为为上“2类函数”，所以，

不妨设，

当时，；

当时，因为，



，

综上所述，，，.

【点睛】不等式恒成立问题常见方法：①分离参数恒成立或恒成立；②数形结合（的图象在上方即可）；③讨论最值或恒成立；④讨论参数，排除不合题意的参数范围，筛选出符合题意的参数范围.